RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION	EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2024	Session principale
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Mathématiques**
	Durée : 3h	Coefficient de l'épreuve : 4

N° d'inscription

✎✎✎✎✎

Exercice 1 : (5.5pt)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \; pour \; tout \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a/ Montrer que, pour tout n∈$\mathbb{N}^*$, $u_n \; et \; u_{n+1}$ sont premiers entre eux.
   b/ Montrer que, pour tout n∈$\mathbb{N}$, $u_n = 2^n - 1$.
   c/ Calculer alors, $(2^{1106} - 1)\Lambda(2^{1107} - 1)$
2) a/ Vérifier que, pour tout $(n,p) \in IN^2$ on a : $u_{n+p} = u_n(u_p + 1) + u_p$.
   b/ Montrer, par récurrence sur k, que : pour tout n∈$\mathbb{N}^*$, pour tout k ≥ 2 $u_{kn} est \; divisible \; par \; u_n$.
3) p :un nombre premier,
   a/ Montrer que si $p \; divise \; a^2 \; alors \; p \; divise \; a$.
   b/($on \; rappel$: $x \in \mathbb{Q} \; si \; et \; seulement \; s'il \; existe \; (a,b) \in \mathbb{N}^2 et$ $a \,\Lambda\, \mathrm{b} = 1$, tels que $x = \frac{a}{b}$)
   Démontrer que $\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}$.

4) a/Vérifier que 13 divise $c = 5^{13} - 5$
   b/On admet que 8191 est premier.
   Montrer que $\sqrt{(2^c - 1)\Lambda(2^{13} - 1)} \notin \mathbb{Q}$.

Question facultatif (1 point bonus)

Prouver cette affirmation : si (u_n $est \; premier$) $alors$ ($n \; est \; premier$).

Exercice 2 : (3.5pt)

I. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ $par \; f: x \longmapsto \frac{x}{2+x^2}$
   Dresser le tableau de variation de f sur [0,1]

II. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2+{u_n}^2} \end{cases}$.
   1) a/ Montrer en utilisant f que : pour tout $n \in \mathbb{N}$; $on \; a$: $u_n \in [0,1]$.
      b/ Montrer que u_n est décroissante.
   2) a/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.
      b/ en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
      c/ Déterminer alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n$.

Question facultatif (1 point bonus)

Soit $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{u_k}$; Montrer que S_n diverge.

Exercice 3 : (6pt)

Soit ABCDEFGH in cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. (Figure 1)

1) a/Déterminer les composantes de vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BG}$.
   b/ En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BEG) est : $x - y + z - 1 = 0$
2) a/Vérifier que : $(DF) \perp (BEG)$
   b/Déterminer les coordonnés du point k l'intersection de $(DF) et (BEG)$
3) pour tout réel m. On considère l'ensemble S_m des point $M(x, y, z)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(1-m)y - 2mz + 2m - \frac{1}{3} = 0 .$$

   a/ Montrer que, pour tout $m \neq \frac{2}{3}$ S_m est la sphère de centre $I_m(m, 1-m, m)$ et de rayon $R_m = \sqrt{3}\left|m - \frac{2}{3}\right|$.
   b/Montrer que, pour tout m $décrit$ $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, I_m $varie$ sur la $droite$ (DF) privée de K.
   c/Montrer que S_m est $tangante$ au $plan$ (BEG) et préciser le point de la tangence.
4) a/ Vérifier que pour tout $m \neq \frac{2}{3}$; B, E, G et I_m ne sont pas coplanaires
   b/ Déterminer le volume v du tétraèdre BEGI_m en fonction de m, puis calculer m pour que $v = \frac{1}{3}$.

Exercice 4 : (5pt)

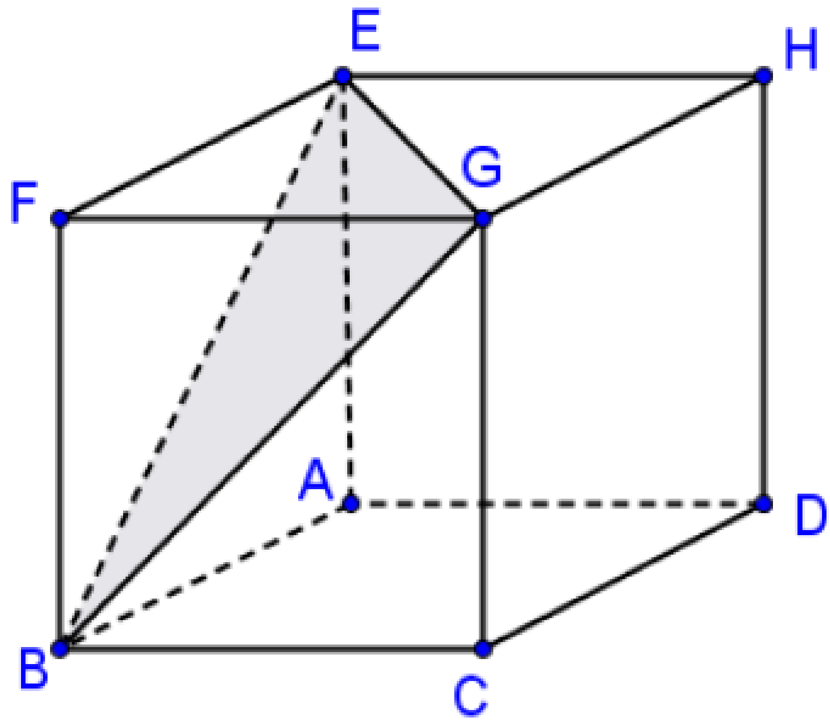
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) + 2sinx + \frac{1}{2}$.
On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

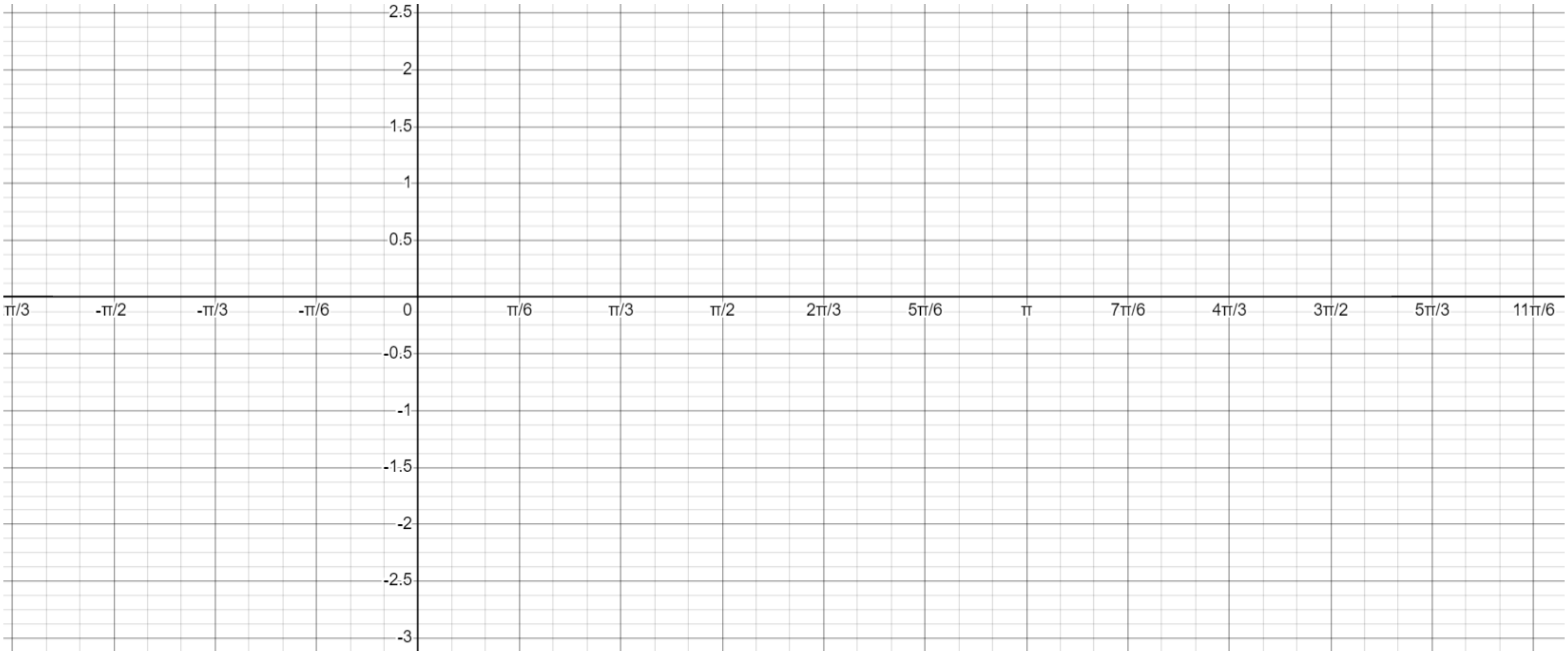
1) a/Montrer que la droite Δ: x $= \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C).
   b/En déduire qu'il suffit d'étudier f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
2) a/Montrer que pour tout réel x on a : $f'(x) = 4\left(\frac{1}{2} - \sin x\right)\cos x$.
   b/Dresser le tableau de variation de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.
3) Calculer $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et $f(0)$.
4) Tracer dans un repère orthogonal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ la courbe Γ de la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$. (sur la copie à rendre)
5) Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x) \geq 0$.

6) Soit g la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ par :

$g(x) = \left|\frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + \frac{1}{4}\right| + \frac{1}{2}\cos 2x + \sin x + \frac{1}{4}$

On désigne par C_g sa courbe représentative. Tracer C_g dans le même repère.





2.5
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-2.5
-3
π/3
-π/2
-π/3
-π/6
π/6
π/3
π/2
2π/3
5π/6
π
7π/6
4π/3
3π/2
5π/3
11π/6